L'estimation du nombre originel de coins: en augmentant l'échantillon...

F. de CALLATAŸ

L'oeuvre numismatique édifiée par L. Villaronga est considérable et polymorphe. Un des grands apports du savant catalan a certainement été d'avoir beaucoup oeuvré en faveur de l'emploi de la statistique dans le champ des études numismatiques. Ses écrits en ce sens sont nombreux.[1] Il était tout naturel dès lors de choisir un thème en rapport avec cette préoccupation pour lui rendre hommage.

On le sait: les prétentions des méthodes fondées sur le calcul de probabilités se sont surtout portées sur l'estimation du nombre originel de coins. Il s'agit de déterminer, à partir du nombre de coins monétaires recensés dans un échantillon de pièces aussi large que possible, le nombre de coins utilisés au total dans l'Antiquité. Comme il est préférable de travailler avec des coins de droit, on note ces valeurs: "n" pour la taille de l'échantillon, "d" pour le nombre de coins de droit effectivement recensés et "D" pour le nombre de coins originels tel que l'utilisation d'une méthode statistique permet de l'estimer. Certaines méthodes requièrent également de connaître "N1" (le nombre de coins représentés par un seul exemplaire dans l'échantillon) et "N2" (le nombre de coins représentés par 2 exemplaires).

1. Voir surtout le livre *Estadística aplicada a la numismática*. Barcelone 1985.

Un grand nombre de ces méthodes ont vu le jour auxquelles on donne le nom de leurs auteurs (Brown, Carcassonne, Carter, Esty, Good, Guilbaud, Lyon, MacGovern, Malkmus, Mora Màs, Müller ou Schroeck). Naturellement, on a également cherché à évaluer la qualité des résultats fournis ainsi que la vraisemblance des postulats qui les fondent.[2] Ici encore, Leandre Villaronga a livré un article de référence.[3] Trois formes de tests ont jusqu'ici été appliquées.

La première forme de test visait l'efficacité relative de ces méthodes en confrontant leurs résultats à un ou quelques cas numismatiques réels pour observer leurs comportements. On obtient ainsi des observations telles que: "Les méthodes Brown et Guilbaud sont très sensibles aux coins largement documentés"; "La méthode Good, en revanche, se montre sensible au nombre de coins attestés par un seul exemplaire"; "Les méthodes Esty 1978 et MacGovern ne valent que pour des indices charactéroscopiques très peu élevés"; "La méthode Mora Màs présente un grand degré de finesse dans le traitement de l'information"; etc... Au total -cela a été souligné- on observe cependant une belle cohérence entre les différents résultats.[4]

La deuxième forme de test n'a pu être appliquée qu'à une seule situation exceptionnelle: à savoir les deniers républicains de Crépusius. La prétention était ici de mesurer l'efficacité absolue. Dans ce seul cas, en effet, développé par Giles F. Carter, il a été permis de comparer l'estimation donnée par les méthodes statistiques avec ce que l'on croit être la réalité puisque les coins de revers de Crépusius sont numérotés.[5] Ici encore, les résultats de cette confrontation se sont révélés plus qu'encourageants, même si les données de départ n'offrent pas l'absolue précision dont on voudrait pouvoir disposer (existence de plusieurs coins de revers différents portant la même numérotation).[6]

Plus récemment, une troisième forme de test a recouru à la simulation par ordinateur. Dans un article paru en 1986 et définitif sur bien des points, Warren W. Esty s'est livré à une simulation en modifiant les différentes données de base (n, d, N1, N2,...). L'examen des résultats qu'il obtient le conduit à privilégier

2. G.F. Carter "Comparison of methods for calculating the total number of dies from die-link statistics". *Statistique et numismatique,* PACT, V, Strasbourg 1981, p. 204-213; W.W. Esty "Estimation of the size of a coinage: a survey and comparison of methods". NC, 146, 1986, p. 185-215 et F. de Callataÿ "Statistique et numismatique: les limites d'un apport". *Revue des Archéologues et Historiens d'Art de Louvain,* 20, 1987, p. 76-95.

3. L. Villaronga "De nuevo la estimacion del numero original de cunos de una emision monetaria". *GacNum,* 85, n° 2, 1987, p. 31-36.

4. F. de Callataÿ. "A propos du volume des émissions monétaires dans l'Antiquité". RBN, 130, 1984, p. 37-48.

5. G.F. Carter "Die-link statistics for Crepusius denarii and calculations of the total number of dies". *Statistique et Numismatique,* Pact, V, Strasbourg 1981, p. 193-203 et "Comparison of methods for calculating the total number of dies from die-link statistics". ibidem, p. 204-213.

6. Les critiques concernant les données utilisées par G.F. Carter ont été résumées par W.W. Esty, 1986, p. 215 (Appendice 8).

l'emploi de la méthode proposée par I.J. Good. Cette méthode présente en effet, aux yeux de cet auteur, des résultats aussi valides que les autres quand l'échantillon est aléatoire et des résultats nettement meilleurs quand l'échantillon n'est pas aléatoire.[7] Dernièrement, Stewart Lyon a fait connaître un travail assez similaire tant par les moyens mis en oeuvre que par les conclusions auxquelles il aboutit.[8] Les mises en garde théoriques de ces deux auteurs paraissent excessivement salutaires, même si, faute d'être suffisamment informés par les numismates, les simulations par ordinateur auxquelles ils recourent s'appuient sur des distributions irréalistes.

Il faut sans doute attribuer à la grande qualité de la mise au point de W.W. Esty la spectaculaire diminution après 1986 des articles touchant à l'estimation du nombre originel de coins. Il semble bien que les outils ainsi que leurs seuils de validité aient maintenant été suffisamment présentés et discutés. S'il est donc de moins en moins nécessaire aujourd'hui de défendre l'intérêt des méthodes fondées sur le calcul de probabilités, la tendance existe cependant au sein de la communauté scientifique à juger que, aucune n'étant parfaite, toutes ces méthodes se valent plus ou moins.[9] Si l'on se restreint aux numismates préoccupés de statistique, on constate -sans surprise- l'utilisation privilégiée des deux méthodes les plus recommandées: à savoir les méthodes de G.F. Carter et de I.J. Good telle que revue par W.W. Esty.[10] Il faut d'ailleurs observer le plus grand succès auprès des numismates de la formule mise au point par G.F. Carter.[11] Nul doute que sa très grande facilité d'emploi y soit pour beaucoup. Très rares sont ceux qui, comme Mr L. Villaronga, n'ont pas craint le (petit) supplément d'effort nécessité pour suivre W.W. Esty en recourant à la formule corrigée de Good, laquelle, dans son principe, paraîtra préférable aux statisticiens de métier.

Ce n'est pas le lieu de revenir en détail sur les postulats qui fondent et opposent ces deux méthodes.[12] Rappelons néanmoins leur principale différence: la mét-

7. W.W. Esty, 1986, p. 197.

8. S. Lyon, "Die Estimation: Some Experiments with Simulated Samples of a Coinage", BNJ, 59, 1989, p. 1-12.

9. M.R. Cowell, "The application of chemical, spectroscopic and statistical methods of analysis", *A Survey of Numismatic Research 1978-1984*, Londres 1986, p. 1032: *"What perhaps does emerge from these comparisons is that the simpler methods give results that are about as reliable (within the rather wide confidence limits applicable) as those requiring complex calculations"*.

10. La prééminence de ces deux méthodes avait déjà été soulignée dans F. de Callataÿ, "L'utilisation des statistiques en numismatique (métrologie, estimation du nombre de monnaies émises)", *Les Dossiers de l'Archéologie*, 33, 1988, p. 10.

11. Si l'on consulte les actes du colloque *Rythmes de la production monétaire de l'Antiquité à nos jours*, Louvain-la-Neuve, 1987, on note les emplois suivants: T. Hackens (Carter: p. 6, note 1); L. Villaronga (Carter, Carcassonne, Mora Mas, Good et Guilbaud: p. 103-109); M. Campo (Carter: p. 125); P.P. Ripollès (Carter et Carcassonne: p. 133-134); M. Amandry (Carter: p. 224); L. Schmitt (Carter: p. 314); E.A. Arslan (Carter: p. 394); J. Pellicer i Bru (Carcassonne, Carter, Mora Mas et Good: p. 427-428).

12. Voir W.W. Esty, 1986, p. 203-209.

hode de G.F. Carter, comme la plupart des autres méthodes du reste, entend parvenir à une estimation du nombre originel de coins, que ceux-ci aient été utilisés très longtemps ou qu'ils aient été esquintés très vite. La méthode de Good, quant à elle, entend estimer la part de la production totale réalisée à partir des coins attestés dans l'échantillon (concept de "coverage" ou "couverture"). Cette seconde méthode est donc plus rapide puisqu'elle permet d'avoir directement une idée, exprimée en pourcentage, du volume de l'émission alors que la méthode de Carter demande pour ce faire de multiplier le résultat, exprimé en coins, par le nombre moyen d'exemplaires susceptible d'avoir été frappé par chaque coin. Dans cette mesure -W.W. Esty a entièrement raison d'insister là-dessus-, la méthode de Good présente l'avantage de pouvoir, pour ainsi dire, faire l'impasse sur les coins très faiblement représentés puisque, par définition, ils ont également été très peu utilisés. D'un autre côté, il semble que le numismate soit plus à l'aise ou satisfait lorsqu'il peut comparer des nombres de coins que lorsqu'il doit confronter des pourcentages de productions.

Le numismate, précisément, aurait grand tort à se cantonner à un rôle passif d'utilisateur. Le statisticien attend de lui qu'il fournisse les cas exemplaires qui permettront une meilleure modélisation théorique. Warren W. Esty, encore lui, est très explicite à ce sujet: *"It would be nice if a more realistic set of relative die-outputs could be tried"*;[13] *"The best choice of p depends upon the true die-output distribution. Perhaps future research will help to decide the question"*[14] ou encore *"It is to be hoped that numismatics authors will include values of N1, N2,... in their articles in addition to n and d. This will not only help to indicate the degree of randomness of the data, but will, when many such results are combined, also help to determine the true variation in die-output"*.[15] Aujourd'hui, après tant de travaux de statisticiens, le principal espoir de progrès réside bien là: dans une meilleure connaissance de la distribution de la productivité des coins. C'est exactement le but de cet article.

Pour ce faire, il a été recouru à une quatrième forme de test, la plus valable peut-être, qui, curieusement, n'avait pas été exploitée jusqu'ici. Il s'agit de comparer les résultats des méthodes lorsque ces dernières sont appliquées, non pas à des monnayages différents, mais, pour un même monnayage, à des tailles croissantes d'échantillons. De fait, si elles sont bien conçues, on attend de ces méthodes statistiques qu'elles nous renseignent correctement sur le nombre originel de coins et cela quelle que soit la qualité de l'échantillon sur lequel on travaille. Autrement dit, le résultat de cette estimation doit rester stable alors même que le nombre de

13. W.W. Esty, 1986, p. 196.
14. W.W. Esty, 1986, p. 213.
15. W.W. Esty, 1986, p. 215.
16. F. de Callataÿ, *Histoire économique et monétaire des guerres mithridatiques*, thèse de doctorat inédite, 3 tomes, Louvain-la-Neuve 1988.

pièces connues -et donc sans doute aussi de coins- augmente. Il s'agit donc de vérifier la stabilité du comportement de "D" (nombre de coins originels) pour différentes tailles de "n".

En pratique, il a été fait appel à deux types de données. Le premier type de données provient de notre thèse de doctorat. Il se fait que, entre la soutenance de celle-ci et sa publication prochaine, nous avons eu l'occasion d'étoffer -parfois substantiellement- le matériel.[16] Cette opportunité permet de comparer pour une dizaine de monnayages les projections en nombre originels de coins. Le deuxième type de données profite d'un début de projet de recherche. Cherchant à rassembler le matériel pour de nouveaux monnayages, nous avons de fait systématiquement numéroté chaque nouvelle monnaie par ordre d'arrivée. Il a de la sorte été possible de réaliser des études de coins intermédiaires pour 10, 20, 30, 40, etc... monnaies. On observera que ces deux types de données se complètent: les premières, à l'inverse des secondes, donnant la mesure de l'évolution pour des échantillons de tailles larges.

Les données issues et prolongeant le doctorat sont les suivantes. La première colonne donne les valeurs trouvées en 1988 pour "n", "d", "n/d", "N1", "N2" et "D" d'après les méthodes Carter, Good (revue en 1986 par Esty), Guilbaud et Esty. La deuxième colonne fait état des valeurs dégagées en 1992. La troisième colonne note la différence entre les deux premières. On observera que les résultats des méthodes Carter et Good pour l'échantillon 1988 sont suivis d'un pourcentage. Ce pourcentage indique l'importance relative du résultat dégagé en 1988 par rapport à celui de 1992 (par exemple: 99,8% = 175,4 x 100 / 175,7).

Echantillon 1988	*Echantillon 1992*	*Différence*
Tétradrachmes de Mithridate		
d = 156	d = 156	(-)
n = 505	n = 544	(+39)
n/d = 3,24	n/d = 3,49	(+0,25)
N1 = 56	N1 = 61	
N2 = 27	N2 = 27	
D/Carter = 192,9 (+/-5,3)(102,3%)	D/Carter = 188,6 (+/-4,8)	(-4,3)
D/Good = 175,4 (167,8<D<183,7)(99,8%)	D/Good = 175,7 (168,4<D<186,3)	(+0,3)
D/Guilbaud = 177,6	D/Guilbaud = 178,4	(+0,8)
Esty 1984 = 86,9%	Esty 1984 = 88,8%	(+1,9%)
Derniers tétradrachmes royaux de Bithynie (128/7-74/3)		
d = 229	d = 243	(+14)
n = 398	n = 435	(+37)
n/d = 1,74	n/d = 1,79	(+0,05)
N1 = 132	N1 = 138	
N2 = 58	N2 = 64	

Echantillon 1988	*Echantillon 1992*	*Différence*
D/Carter = 436,0 (+/-22,9)(98,0%)	D/Carter = 445,0 (+/-21,7)	(+9,0)
D/Good = 342,3 (309,1<D<383,4)(96,3%)	D/Good = 355,6 (323,2<D<395,2)	(+13,3)
D/Guilbaud = 325,8	D/Guilbaud = 336,6	(+10,8)
Esty 1984 = 66,8%	Esty 1984 = 68,3%	(+1,5%)
Derniers alexandres d'Odessos		
d = 32	d = 35	(+3)
n = 169	n = 226	(+57)
n/d = 5,28	n/d = 6,46	(+1,18)
N1 = 9	N1 = 8	
N2 = 4	N2 = 1	
D/Carter = 36,5 (+/-1,3)(97,9%)	D/Carter = 37,3 (+/-1,0)	(+0,8)
D/Good = 33,8 (32,2<D<35,6)(93,1%)	D/Good = 36,3 (35,3<D<37,4)	(+2,5)
D/Guilbaud = 41,2	D/Guilbaud = 47,8	(+6,6)
Esty 1984 = 94,7%	Esty 1984 = 96,5%	(+1,8%)
Derniers alexandres de Mésembria		
d = 41	d = 52	(+11)
n = 243	n = 490	(+247)
n/d = 5,93	n/d = 9,42	(+3,49)
N1 = 11	N1 = 11	
N2 = 7	N2 = 7	
D/Carter = 44,2 (+/-1,2)(83,2%)	D/Carter = 53,1 +/-1,0	(+8,9)
D/Good = 42,9 (41,2<D<44,8)(80,6%)	D/Good = 53,2 (52,1<D<54,3)	(+10,3)
D/Guilbaud = 54,0	D/Guilbaud = 86,5	(+32,5)
Esty 1984 = 95,5%	Esty 1984 = 97,8%	(+2,3%)
Derniers lysimaques de Byzance		
d = 155	d = 177	(+22)
n = 264	n = 315	(+51)
n/d = 1,70	n/d = 1,78	(+0,08)
N1 = 86	N1 = 102	
N2 = 47	N2 = 43	
D/Carter = 303,2 (+/-20,1)(92,8%)	D/Carter = 326,9 (+/-18,8)	(+23,7)
D/Good = 229,4 (201,6<D<266,2)(87,8%)	D/Good = 261,4 (234,1<D<295,9)	(+32,0)
D/Guilbaud = 225,1	D/Guilbaud = 246,4	(+21,3)
Esty 1984 = 67,4%	Esty 1984 = 67,6%	
(+0,3%)*Derniers cistophores d'Ephèse*		
d = 110	d = 141	(+31)
n = 169	n = 255	(+86)
n/d = 1,54	n/d = 1,81	(+0,27)

Echantillon 1988	*Echantillon 1992*	*Différence*
N1 = 64	N1 = 82	
N2 = 22	N2 = 32	
D/Carter = 252,9 (+/-23,9)(99,0%)	D/Carter = 255,4 (+/-16,1)	(+2,5)
D/Good = 176,6 (150,4<D<213.8)(85,1%)	D/Good = 207,5 (184,3<D<237,5)	(+30,9)
D/Guilbaud = 181,7	D/Guilbaud = 193,4	(+11,7)
Esty 1984 = 62,1%	Esty 1984 = 67,8%	(+5,7%)
Drachmes d'Ariarathe IX de Cappadoce		
d = 35	d = 40	(+5)
n = 128	n = 159	(+31)
n/d = 3,66	n/d = 3,98	(+0,32)
N1 = 13	N1 = 16	
N2 = 8	N2 = 7	
D/Carter = 41,7 (+/-2,1)(89,3%)	D/Carter = 46,7 (+/-2,0)	(+5,0)
D/Good = 38,9 (35,7<D<42,8)(87,6%)	D/Good = 44,4 (41,4<D<48,0)	(+5,5)
D/Guilbaud = 40,2	D/Guilbaud = 46.6	(+6.4)
Esty 1984 = 89,5%	Esty 1984 = 89,9%	(+0,4%)
Tétradrachmes de Tigrane le Grand		
d = 49	d = 49	(-)
n = 218	n = 239	(+21)
n/d = 4,45	n/d = 4,88	(+0,43)
N1 = 17	N1 = 17	
N2 = 9	N2 = 8	
D/Carter = 55,7 (+/-1,9)(101,8%)	D/Carter = 54,7 (+/-1.7)	(-1,0)
D/Good = 53,1 (50,1<D<56,6)(100,8%)	D/Good = 52,7 (50,2<D<55,6)	(-0,4)
D/Guilbaud = 58,6	D/Guilbaud = 60,1	(+1,5)
Esty 1984 = 91,7%	Esty 1984 = 92,9%	(+1,2%)

Quant aux données reprises à une étude en cours, elles se présentent comme suit: la première colonne donne la taille de l'échantillon (n), la seconde le nombre de coins de droit (d), la troisième l'indice charactéroscopique (n/d), la quatrième le nombre de coins représentés par un seul exemplaire (N1), la cinquième celui par deux exemplaires (N2). Les colonnes suivantes donnent les estimations (en souligné) et les intervalles de confiance d'après les méthodes de Carter et de Good, soit, respectivement, la méthode la plus utilisée par les numismates et celle qui leur est la plus conseillée. Ces estimations sont suivies d'un pourcentage. Ce pourcentage exprime l'importance relative des résultats intermédiaires par rapport au résultat final (valeur de 100% pour l'estimation obtenue à partir de l'échantillon le plus large).

n	*d*	*n/d*	*N1*	*N2*	*D/Carter*	%	*D/Good*	%
Abydos								
10	7	1,43	5	1	[9,7<18,6<27,5]	(69,1)	[7,4<13,4<71,5]	(56,8)
20	12	1,67	8	3	[17,9<24,2<30,5]	(90,0)	[12,7<19,5<41,8]	(82,6)
30	15	2,00	4	6	[20,3<24,4<28,5]	(90,7)	[13,1<17,0<24,3]	(72,0)
40	19	2,11	5	5	[25,5<29,6<33,7]	(110,0)	[17,7<21,6<27,5]	(91,5)
62	21	2,95	7	5	[24,6<26,9<29,2]	(100,0)	[20,6<23,6<27,6]	(100,0)
Cyzique								
10	9	1,11	8	1	[6,5<65,8<125,1]	(105,4)	[15,O<40,5<infini]	(91,2)
20	16	1,25	13	2	[36,5<62,4<88,3]	(100,0)	[24,5<44,4<234,9]	(100,0)
Egée								
10	4	2,50	2	-	[4,1<5,6<7,1]	(136,6)	[3,8<5,0<7,3]	(125,0)
20	4	5,00	2	-	[3,9<4,4<4,9]	(107,3)	[3,9<4,4<5,2]	(110,0)
30	4	7,50	-	2	[3,9<4,2<4,5]	(102,4)	[3,5<4,0<4,6]	(100,0)
36	4	9,00	-	1	[3,9<4.1<4,3]	(100,0)	[3,7<4,0<4,3]	(100,0)
Héraclée								
10	8	1,25	6	1	[11,8<31,2<50,6]	(111,0)	[9,5<18,9<2.963,0]	(69,2)
20	10	2,00	6	-	[12,8<16,2<19,6]	(57,7)	[11,1<14.3<20.2]	(52,4)
30	14	2,14	7	2	[18,1<21,5<24,9]	(76,5)	[14,4<18,2<24,7]	(66.7)
40	15	2,67	7	3	[17,9<20,2<22,5]	(71,9)	[15,0<18,1<22,8]	(66,3)
50	18	2.78	8	3	[21,3<23.7<26,1]	(84.3)	[18,3<21,4<25,7]	(78,4)
60	19	3,16	9	3	[21,7<23,7<25,7]	(84.3)	[19,5<22,3<26,1]	(81.7)
117	25	4,68	10	5	[26,8<28,1<29,4]	(100,0)	[25,2<27,3<29,7]	(100,0)
Lébédos[17]								
10	5	2,00	2	4	[5,5<8,1<10,7]	(95,3)	[3,3<5,6<18,6]	(70,0)
20	6	3,33	2	1	[6,4<7,4<8,4]	(87,1)	[5,5<6,6<8,4]	(82,5)
53	8	6,63	-	2	[8,0<8,5<9,0]	(100,0)	[7,4<8,0<8,6]	(100,0)
Smyrne (Tyché/Smyrnaion)								
10	7	1,43	2	4	[9,7<18,6<27,5]	(131,0)	[4,6<7,9<10,8]	(59,0)
20	8	2,50	5	1	[9,1<11,1<13,1]	(78,2)	[8,0<10,6<15,5]	(79,1)
30	8	3,75	3	4	[8,5<9,5<10,5]	(66,9)	[7,1<8,8<11,6]	(65,7)
40	9	4,44	2	3	[9,4<10,2<11,0]	(71,8)	[8,2<9,4<11,1]	(70,1)
50	12	4,17	2	3	[12,7<13,8<14,9]	(97,2)	[11,2<12,5<14,1]	(93,3)
71	13	5,46	2	3	[13,4<14,2<15,0]	(100,0)	[12,4<13,4<14,5]	(100,0)

17. Pour le total de 53, voir M. AMANDRY "Les tétradrachmes à la couronne de feuillage frappés à Lébédos (Ionie)". *Kraay-Mørkholm Essays*, Louvain-la-Neuve 1989, p. 1-7, pl. 1.

n	*d*	*n/d*	*N1*	*N2*	*D/Carter*	%	*D/Good*	%
Smyrne (Tyché/Lion)								
10	6	1,67	4	3	[7,4<12,1<16,8]	(27,3)	[4,8<9,0<69,0]	(24,4)
20	14	1,43	7	2	[25,2<37,2<49,2]	(83,8)	[14,7<21,2<38,0]	(57,5)
30	18	1,67	9	3	[28,8<36,3<43,8]	(81,8)	[19,1<25,5<38,0]	(69,1)
40	21	1,90	11	3	[30,4<35,9<41,4]	(80,9)	[22,9<28,8<38,8]	(78,0)
46	25	1,84	15	4	[37,8<44,4<51,0]	(100,0)	[29,0<36,9<50,7]	(100,0)
Syros[18]								
10	7	1,43	5	1	[9,7<18,6<27,5]	(50,0)	[7,4<13,4<71,5]	(53,6)
18	13	1,38	9	3	[23,9<37,2<50,5]	(100,0)	[14,8<25,0<81,5]	(100,0)
Ténédos								
10	8	1,25	6	2	[11,8<31,2<50,6]	(137,4)	[8,4<18,0<infini]	(87,4)
20	13	1,54	6	4	[21,2<29,8<38,4]	(131,3)	[12,1<18,0<35,0]	(87,4)
30	16	1,88	7	3	[22,7<27,8<32,9]	(122,5)	[16,0<20,7<29,1]	(100,5)
40	18	2,22	10	1	[23,4<27,0<30,6]	(118,9)	[19,9<24,0<30,1]	(116,5)
55	18	3,06	7	2	[20,7<22,7<24,7]	(100,0)	[18,2<20,6<23,7]	(100,0)

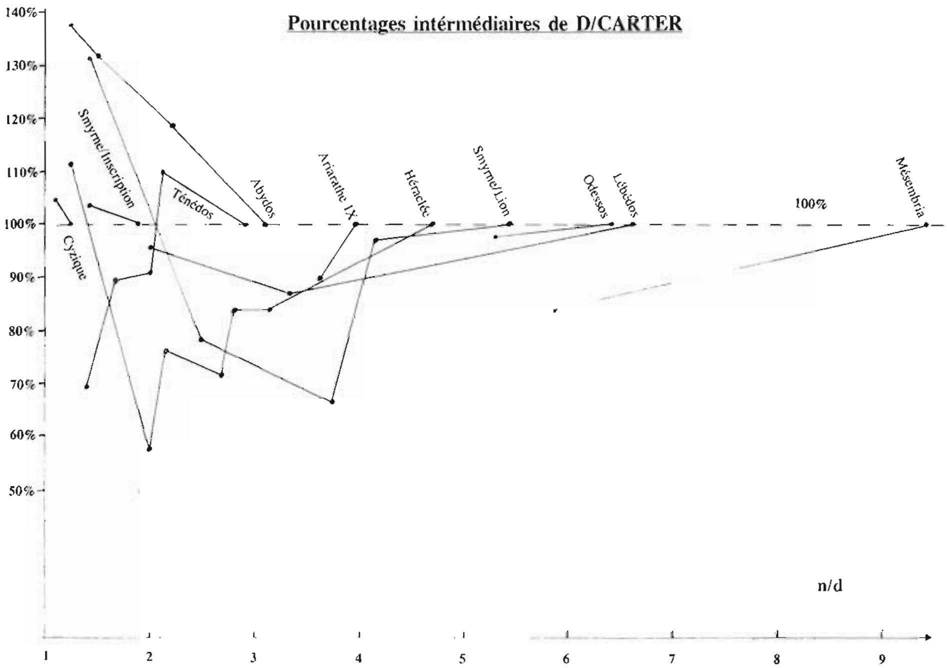
Il apparaît très clairement de la confrontation de ces données que, pour s'en tenir aux résultats principaux sans considérer les intervalles de confiance, la méthode de Carter propose, dans tous les cas sauf un, des estimations en nombres de coins plus élévées que celles de Good. L'exception qui confirme la règle est ici représenté par les derniers alexandres de Mésembria tels que documentés en 1992. Encore, s'agit-il d'une différence minime puisque le nombre originel de coins est évalué à 53,1 selon Carter et 53,2 selon Good. La raison de cette exception est du reste facile à déterminer: elle réside dans la fréquence anormalement haute de coins attestés par un seul exemplaire (N1 = 11) pour un indice charactéroscopique aussi élevé (n/d = 9,42). Cela rappelle le cas déjà cité par W.W. Esty des tétradrachmes à la couronne de Cymé (n = 540; d = 79; n/d = 6,83 et N1 = 16).[19]

Le comportement des résultats des deux méthodes évolue surtout différemment en fonction de l'augmentation de l'échantillon. Une bonne manière de visualiser ce fait est sans doute de construire un graphique qui reprend, en abscisse, l'indice charactéroscopique (n/d) et, en ordonnée, le pourcentage obtenu à différents moments de la construction de l'échantillon, étant entendu que la valeur de 100% est attribuée au dernier de ces moments.

18. Le total de 18 ajoute un exemplaire aux résultats exposés par H. Nicolet-Pierre et M. Amandry, "Les monnaies d'argent de Syros", *Florilegium Numismaticum. Studia in Honorem U. Westermark Edita*, Stockholm 1992, p. 295-306.

19. W.W. Esty, 1986, p. 211.

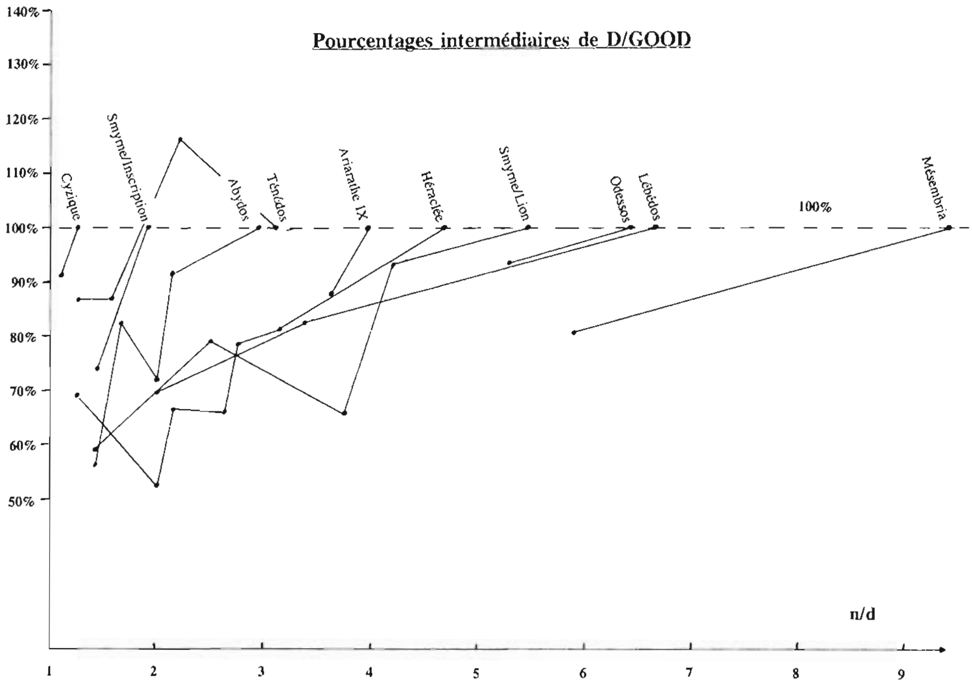
Pour la méthode de G.F. Carter, il est très remarquable d'observer que le résultat de l'estimation tend à diminuer dans un nombre significatif de cas au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'indice 3 (n/d = 3), pour augmenter ensuite. Soit la courbe suivante:



Ce profil ne surprend pas. Il correspond aux données intiales utilisées par G.F. Carter. Rappelons que le cas des deniers de Crépusius sur lequel est bâtie cette méthode offre un indice charactéroscopique proche de 3 (2,88 = 1.075/373). On obtient ici le décalque en négatif de la courbe d'une distribution gamma telle qu'utilisée par G.F. Carter.[20]

Pour la méthode de I.J. Good améliorée par W.W. Esty, on constate que toutes les estimations finales (100%), sans exception, sont supérieures aux estimations initiales. D'une manière générale, on observe d'ailleurs, à de très rares cas près, un accroissement systématique de l'estimation au fur et à mesure que l'indice charactéroscopique augmente. Cet accroissement ne semble pas constant: la pente de la courbe connaît un adoucissement perceptible après l'indice 3 ou 4.

20. G.F. Carter, «A simplified method for calculating the original number of dies from die link statistics». *ANSMN*, 28, 1983, p. 198, fig. 1.



La principale observation de cet examen empirique vaut pour les deux méthodes: d'une manière générale, le résultat de l'estimation continue de croître alors même que l'indice charactéroscopique (n/d) est élevé. Sur les 17 monnayages considérés, 3 tombent en-dehors de ce constat: les tétradrachmes de Mithridate Eupator (n/d = 3,49), de Tigrane le Grand (n/d = 4,88) et d'Egée (n/d = 9,00). Dans ces 3 seuls cas, l'augmentation de l'échantillon n'a pas permis de découvrir de nouveaux coins.[21]

Encore une fois, le numismate ne sera pas autrement surpris: cela tient au grand nombre de coins très peu utilisés et dont un exemplaire (N1) peut apparaître subitement dans un échantillon pour lequel les coins paraissent déjà très bien documentés. En réalité, qui examine les études de coins à indices charactéroscopiques élevés est frappé par l'importance de N1 dans une très large majorité de cas. Dans un précédent article, nous avions déjà évoqué plusieurs de ces cas remarquables.[22] Nous avons voulu aller plus loin. On trouvera ici les données pour 52 monnayages d'indice charactéroscopique supérieur à 3 et comptant, sauf exception, un

21. L'observation est plus étonnante pour Mithridate et Tigrane que pour la ville d'Egée dont on peut penser détenir un exemplaire au moins de tous les coins de droit utilisés.

22. F. DE CALLATAŸ, 1987, p. 88-89.

minimum de 10 coins de droit dans l'échantillon. Pour ne pas alourdir la présentation, la dénomination de ces monnayages est souvent sommaire. On se reportera donc, pour une meilleure information, aux références qui accompagnent.[23]

Monnayages	*n*	*d*	*n/d*	*N1*	*N2*	*N1+N2/d*
Drachmes de la ligue eubéenne[24]	1109	28	41,07	3	1	14,3%
Tétradrachmes de Lilybaion (3)[25]	573	37	15,49	4	2	16,2%
Tétradrachmes puniques de Sicile[26]	351	26	13,50	5	1	23,1%
Drachmes d'Antiochos III[27]	77	6	12,83	1	1	33,3%
Tétradrachmes de Macédoine[28]	81	7	11,57	1	1	28,6%
Tétradrachmes de Lilybaion (2)[29]	362	34	10,65	1	6	20,6%
alexandres de Mésembria	490	52	9,42	11	7	34,6%
Tétradrachmes d'Athènes (2)[30]	3853	474	8,13	41	38	16,7%
Trioboles de Mégapolis[31]	305	42	7,26	12	3	35,7%
Tétradrachmes de Cymé[32]	537	79	6,80	17	9	32,9%
Tétradrachmes de Magnésie[33]	242	36	6,72	6	1	19,4%
alexandres d'Odessos	226	35	6,46	8	1	25,7%
alexandres de Myriandros[34]	153	25	6,12	8	2	40,0%
Drachmes de Chalcis[35]	435	75	5,80	17	5	29,3%
1/8 de statères de Philippe II[36]	195	35	5,57	11	1	34,3%
Tétradrachmes d'Aesillas[37]	506	92	5,50	37	14	55,4%
Tétradrachmes de Smyrne	71	13	5,46	2	3	38,5%
Drachmes d'Athènes (1,2,3)	702	132	5,32	32	22	40,9%
50 litrae de Syracuse[38]	161	32	5,03	13	5	56,3%

23. Les monnayages qui ne sont pas suivis d'un appel de note sont ceux présentés en détail en début de cette étude.

24. W.P. Wallace. *The Euboian League and Its Coinage*, (*NNM*, 134), New York 1956.

25. G.K. Jenkins. "Coins of Punic Sicily. Part 3". *SNR*, 56, 1977, p. 5-65, pl. 1-22 (série 3).

26. G.K. Jenkins. "Coins of Punic Sicily. Part 1". *SNR*, 50, 1971, p. 25-78, pl. 1-24.

27. A. Houghton. "The Elephants of Nisibis". *ANSMN*, 31, 1986, p. 107-124, pl. 27-29.

28. P.A. MacKay "Macedonian Tetradrachms of 148-147 B.C.". *ANSMN*, 14, 1968, p. 15-40, pl. 4-8.

29. G.K. Jenkins, 1977.

30. M. Thompson. *The New Style Silver Coinage of Athens*. (NS. 10). New York 1961.

31. J.A. Dengate. "The Triobols of Megapolis". *ANSMN*, 13, 1967, p. 57-110, pl. 20-28.

32. J.H. Oakley, «The autonomous wreathed tetradrachms of Kyme, Aeolis». *ANSMN*, 27, 1982, p. 1-37, pl. 1-14.

33. N.F. Jones. "The Autonomous Wreathed Tetradrachms of Magnesia-on-Maeander". *ANSMN*, 24, 1979, p. 63-109, pl. 20-26.

34. E.T. Newell. "Myriandros - Alexandria Kat'Isson". *AJN*, 53 (2), 1919, p. 1-42, pl. 1-2.

35. O. Picard. *Chalcis et la confédération eubéenne. Etude de numismatique et d'histoire (IVe-Ier siècle)*. Paris 1979.

36. G. Le Rider. *Le monnayage d'argent et d'or de Philippe II frappé en Macédoine de 359 à 294*. Paris 1977 (même référence pour les autres séries de Philippe II).

37. F. de Callataÿ. "Les monnaies au nom d'Aesillas". *Mélanges Clain-Stefanelli*, Louvain-la-Neuve 1992 (à paraître).

38. G.K. Jenkins. "Electrum Coinage at Syracuse". *Essays in Greek Coinage Presented to Stanley Robinson*. Oxford 1968, p. 145-162, pl. 14-15.

Monnayages	*n*	*d*	*n/d*	*N1*	*N2*	*N1+N2/d*
Didrachmes des Epirotes[39]	50	10	5,00	2	1	30,0%
Cistophores d'Apamée[40]	198	40	4,95	8	2	25,0%
alexandres de Milet[41]	153	31	4,94	8	5	41,9%
Drachmes de Chalcis	1006	204	4,93	35	36	34,8%
alexandres de Rhodes[42]	182	37	4,92	16	4	54,0%
Hémidrachmes de Chalcis	122	25	4,88	7	6	52,0%
Tétradrachmes de Tigrane le Grand	239	49	4,88	17	8	51,0%
Tétradrachmes d'Héraclée	117	25	4,68	10	5	60,0%
Statères de Mithridate[43]	51	11	4,64	3	1	36,4%
Tétradrachmes de Ptolémée V[44]	86	19	4,53	5	2	36,8%
Tétradrachmes d'Antiochos IV[45]	244	55	4,44	13	8	38,2%
Tétradrachmes de Myrina[46]	415	97	4,28	22	20	43,3%
Statères de Philippe II	1642	386	4,25	102	59	41,7%
Drachmes d'Ariarathe IX	159	40	3,98	16	7	57,5%
alexandres de Pergame	75	20	3,75	5	4	45,0%
Décadrachmes de Ptolémée III[47]	107	29	3,69	7	8	51,7%
Statères d'Alexandre (Milet)	160	44	3,64	13	5	40,9%
Tétradrachmes d'Antiochos Hiérax[48]	58	16	3,63	6	2	50,0%
Trioboles de Mégalopolis[49]	122	34	3,62	12	5	50,0%
alexandres de Sardes	172	48	3,58	15	8	47,9%
Tétradrachmes d'Athènes (3)	1320	375	3,52	98	80	47,5%
alexandres de Chios[50]	269	77	3,49	32	6	49,4%
Tétradrachmes d'Athènes (1)	1003	287	3,49	69	56	43,6%
Tétradrachmes de Mithridate Eupator	544	156	3,49	61	27	56,4%
Tétradrachmes de Philippe II	1539	451	3,41	122	102	49,7%

39. P.R. Franke. *Die antiken Münzen von Epirus. I: Poleis, Stämme und epirotischer Bund bis 27 v. Chr. Katalog und Untersuchungen.* Wiesbaden 1961.

40. F.S. Kleiner. "The Late Cistophori of Apameia". *Essays in Honor of M. Thompson.* Wetteren 1979, p. 119-130, pl. 12-14.

41. M. Thompson. *Alexander's Drachm Mints. I: Sardes and Miletus.* NS, 16, New York 1983 (vaut également pour les autres séries de Sardes et de Milet).

42. F.S. Kleiner. "The Alexander Tetradrachms of Pergamum and Rhodes". *ANSMN*, 17, 1971, p. 95-125, pl. 21-34 (vaut également pour Pergame).

43. F. de Callataÿ. *Histoire économique et monétaires des guerres mithridatiques.* Thèse inédite. Louvain-la-Neuve 1988.

44. O. Morkholm. "The Portrait Coinage of Ptolemy V. The Main Series". *Essays in Honor of M. Thompson.* Wetteren 1979, p. 203-214, pl. 23-24.

45. O. Morkholm. *Studies in the Coinage of Antiochus IV of Syria.* Copenhague 1963.

46. K.S. Sacks. "The Wreathed Coins of Aeolian Myrina". *ANSMN,* 30, 1985, p. 1-43, pl. 1-22.

47. V. Van Driessche. *Ptolémée III Evergète, Ptolémée IV Philopator. Essai historique et numismatique.* Mémoire inédit. Louvain-la-Neuve 1987.

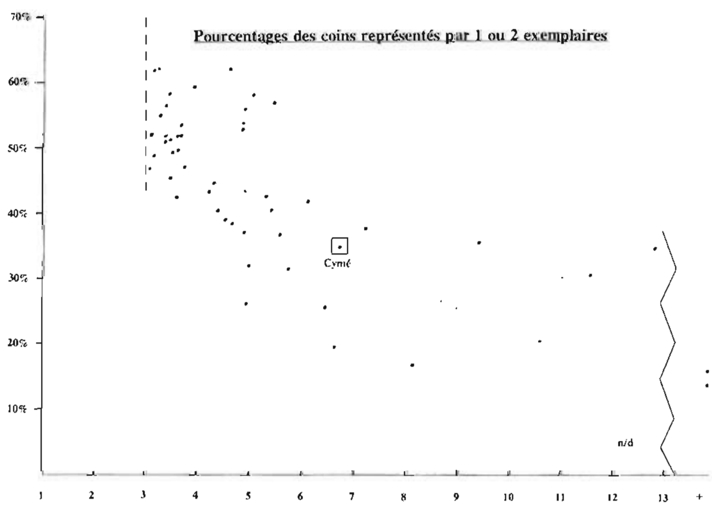
48. A. Houghton. "The Seleucid Mint at Lampsacus". *ANSMN,* 23, 1978, p. 59-68, pl. 8.

49. J.A. Dengate. "The Triobols of Megalopolis". *ANSMN,* 13, 1967, p. 57-110, pl. 20-28.

50. R. Bauslaugh. "The Posthumous Alexander Coinage of Chios". *ANSMN*, 24, 1979, p. 1-45, pl. 1-17 (vaut également pour les drachmes de Chios).

Monnayages	*n*	*d*	*n/d*	*N1*	*N2*	*N1+N2/d*
Bronze de Rhodes[51]	75	22	3,41	8	4	54,5%
Drachmes d'Alexandre (Chios)	68	20	3,40	8	2	50,0%
Statères d'Alexandre (Sardes)	181	56	3,23	19	11	53,6%
alexandres de Corinthe[52]	297	93	3,19	37	19	60,2%
Drachmes rhodiennes de Macédoine[53]	95	30	3,17	9	9	60,0%
alexandres du Péloponnèse[54]	47	15	3,13	5	2	46,7%
Tétradrachmes de Ténédos	55	18	3,06	7	2	50,0%
1/12 de statères de Philippe II	61	20	3,05	8	1	45,0%

Ces quelques exemples sont édifiants. La dernière colonne, en particulier, donne la mesure de l'importance de N1 et N2 pour des échantillons à indice charactéroscopique élevé. Ces cas numismatiques réels sont porteurs d'un enseignement de première importance pour le statisticien: de manière paradoxale, la normalité n'est pas là où il le pense. Contrairement à ce qu'estimait W.W. Esty donc pour les tétradrachmes de Cymé, un échantillon à haut indice charactéroscopique et forte valeur pour N1 et/ou N2, loin d'être biaisé par une particularité constitutive qui le rend non-aléatoire ("non-randomness"), nous paraît bien au contraire être le témoin d'un prélèvement aléatoire. Le résultat obtenu pour Cymé est en tous cas parfaitement conforme à la norme ainsi qu'il apparaît dans le graphique ci-dessous, lequel place les indices charactéroscopiques (n/d) en abscisses et les pourcentages représentés par N1 + N2 en ordonnées:

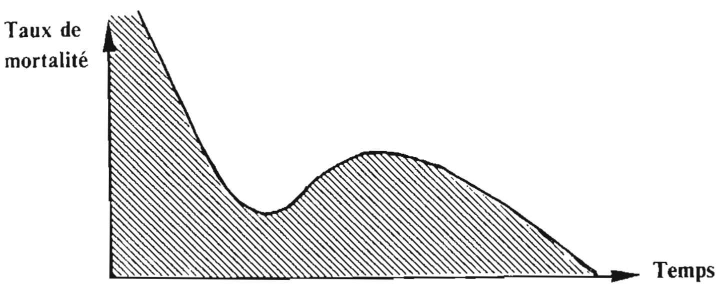


51. R.H.J. Ashton. "Rhodian Bronze Coinage and the Earthquake of 229-226 BC". *NC*, 146, 1986, p. 1-18, pl. 1-4.
52. E.T. Newell et S.P. Noe. *The Alexander Coinage of Sicyon*. NS, 6. New York 1950.
53. R.H.J. Ashton. "A Series of Pseudo-Rhodian Drachms from Mainland Greece". *NC*, 148, 1988, p. 21-32, pl. 4-6.
54. H.A. Troxell. "The Peloponnesian Alexanders". *ANSMN*, 17, 1971, p. 41-94, pl. 9-20.

On perçoit nettement combien le pourcentage affecté à N1 + N2 décroit de manière progressive. Si l'on peut se fier au résultat du cas exceptionnel représenté par les drachmes de la ligue eubéenne, il faudrait même en conclure à une virtuelle stabilisation du pourcentage à partir de l'indice 15 plus ou moins (différence de 1,9% entre les indices 15,49 et 41,07). Il est clair, de toute manière, que la proportion de coins attestés par 1 ou 2 exemplaires dépasse pour les échantillons à haut indice charactéroscopique toutes les distributions qui fondent les méthodes statistiques existantes.

Il faut ici ressortir le modèle théorique que nous avons proposé ailleurs: la productivité des coins, en fonction de ce qui peut être observé, paraît adopter une distribution assez comparable à celle de la mortalité humaine (avant, du moins, les progrès de ce siècle dans la lutte contre la mortalité infantile...).[55] Il s'agit de la conjonction de deux courbes: une, déclinante, pour la forte mortalité infantile, suivie d'une autre, relativement symétrique ou gaussienne, pour les individus ayant survécu à cette mortalité. En effet, à l'instar de ce qui se passe pour bien des processus industriels, il paraît assez vraisemblable de penser qu'un grand nombre de coins aient dû être écartés très rapidement en raison d'un vice de fabrication. Dès lors, la distribution qui nous paraît le mieux répondre aux données empiriques adopte une courbe du type suivant:

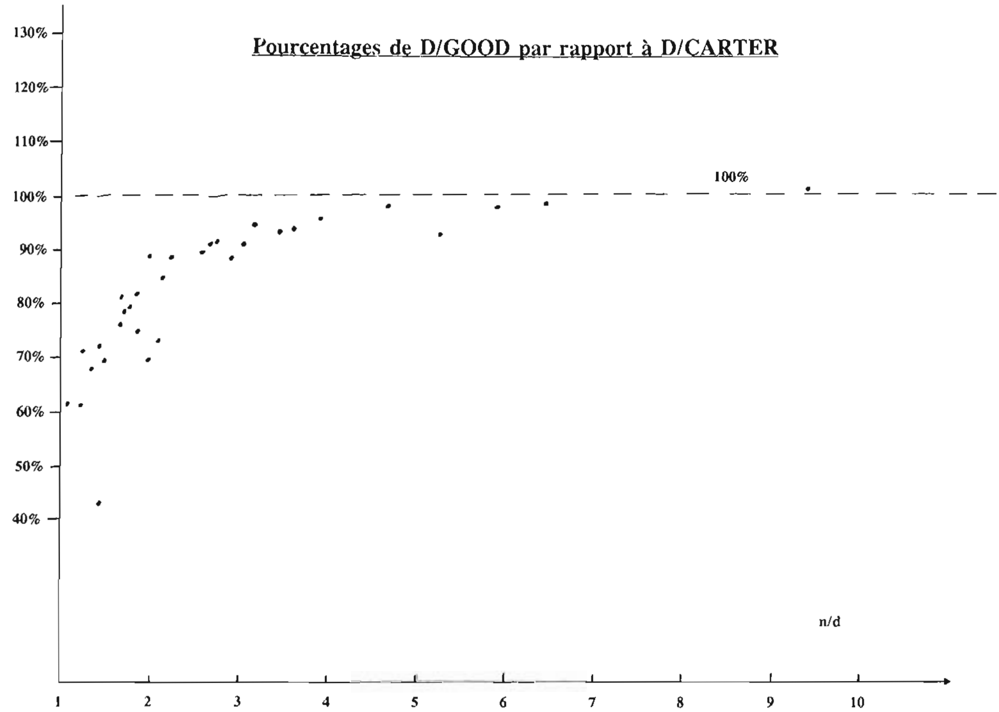
Distribution probable de la productivité des coins



En attendant que l'on puisse un jour développer une formule en rapport avec cette distribution, il faut revenir aux méthodes de Carter et de Good. Non seulement, en effet, les résultats de celles-ci n'évoluent pas de la même manière selon que l'on accroit l'échantillon, mais encore constate-t-on, dans l'absolu, une différence de résultats qui conduit à des estimations systématiquement plus hautes dans le cas de la méthode de G.F. Carter. Comme on l'a vu, cette règle souffre une seule exception: les alexandres tardifs de Mésembria d'après l'échantillon de 1992. Ce n'est pas un hasard. Il s'agit de l'échantillon dont l'indice charactéroscopique est le plus élevé (n/d = 9,42). Si l'on attribue pour chaque taille d'échantillon la

55. F. de Callataÿ, 1987, p. 89-90.

valeur de 100% à l'estimation fournie par la méthode de G.F. Carter, on obtient pour la méthode de I.J. Good le décalage suivant:



Ces données peuvent être résumées ainsi:

n/d	*% de D/Good par rapport à D/Carter*
Plus de 6	Plus de 97%
Entre 3 et 6	Entre 90% et 97%
Entre 2,5 et 3	Entre 88% et 92%
Entre 2 et 2,5	Entre 70 et 89%
Entre 1,5 et 2	Entre 70% et 80%
Entre 1,25 et 1,5	Entre 60% et 72%

Ici encore, il s'agit d'une courbe exponentielle où les valeurs médianes sont proches de: 60% pour 1,25; 70% pour 1,50; 78% pour 1,75; 84% pour 2,00; 87% pour 2,25; 89% pour 2,50; 90% pour 2,75; 91% pour 3,00; 95% pour 4,00; 97% pour 7,00 et 100% pour 9. Cette situation n'est pas sans danger. On vient de voir que toutes les méthodes, même celle pourtant généreuse de G.F. Carter, sous-estimaient le nombre originel de coins utilisés. Or ce dernier tableau indique un net décrochage des résultats obtenus par la méthode de Good par rapport à ceux de

Carter. C'est particulièrement vrai pour les échantillons d'indice charactéroscopique inférieur à 2. On se méfiera donc de l'utilisation de la méthode de I.J. Good en-deçà de cette limite (qui est de loin supérieure à la limite fixée par W.W. Esty pour les échantillons à "très basse couverture" ("very low coverage"), lorsque N1/n est supérieur ou égal à 0,9, c'est-à-dire lorsque n/d est inférieur ou égal à 1,05 !).[56] Au-delà de 3, en revanche, la différence de résultats tend à devenir négligeable.

Il faut, enfin, évoquer les intervalles de confiance. On l'aura noté: la discussion a porté jusqu'ici sur les valeurs moyennes des estimations. Or, cela a été suffisamment réclamé par les statisticiens, il s'agit de prendre en compte les intervalles de confiance. L'examen des données illustre à nouveau combien, pour un indice charactéroscopique supérieur à 3, les résultats des deux méthodes tendent à se valoir même si la fourchette proposée par I.J. Good reste plus large. La divergence augmente, en revanche, au fur et à mesure que l'on a affaire à un indice peu élevé. W.W. Esty ainsi que d'autres ont sévèrement critiqué l'intervalle de confiance mis au point par G.F. Carter. De fait, la fourchette qui en résulte se révèle régulièrement dérisoirement petite en rapport de l'incertitude. Elle fait abusivement croire en une précision de la méthode. Ainsi, lorsque un échantillon de 10 monnaies permet de recenser 9 coins de droit différents, il est illusoire de fixer la limite supérieure de D à 125,1 (cas de Cyzique). Qu'en est-il cependant de l'intervalle de confiance de 95% proposé par W.W. Esty pour la méthode de I.J. Good ? Il s'agit en tous cas d'un outil plus prudent pour les échantillons à faible indice. On voit même qu'il n'a pas honte d'avouer son incapacité pour les indices les plus faibles en ne fixant aucune limite supérieure à la valeur de D (cas de Cyzique et Ténédos). Cette honnêteté embarasse évidemment le numismate. Notons au passage que cet intervalle de confiance fixe des limites inférieures fantaisistes, beaucoup moins réalistes en tous cas que le coefficient de Carter. Ces limites inférieures sont très souvent en-dessous du nombre de coins recensés (Dmin<d), ce qui est naturellement impossible. Prises littéralement, elles nous font également croire, contre toute vraisemblance, qu'il pourrait nous manquer peu de coins. Prenons l'exemple de l'émission "Smyrne (Tyché/Lion)": lorsque l'on distingue 21 coins de droit (d) sur 40 exemplaires (n), il est clair que, jamais, le nombre originel de coins (D) n'a de chance d'être aussi peu élevé que 22,9 (Dmin/Good). On préferera nettement une valeur de 30,4 (Dmin/Carter). Cet irréalisme apparaîtra néanmoins comme un moindre mal. De fait, pour beaucoup, la vraisemblance de la limite inférieure (Dmin) importe moins que celle de la limite supérieure (Dmax), la crainte du numismate étant souvent d'abord de ne pas surestimer la production. Mais, précisément, la limite supérieure proposée par Esty n'apparaît pas comme un garde-fou à toute épreuve: sur les exemples présentés ici, la limite supérieure de Good (Dmax/Good) se révèle à 7 occasions inférieure au nombre de coins

56. W.W. Esty, 1986, p. 209-210.

effectifs finalement recensés (1x Mésembria; 3x Héraclée et 3x Smyrne "Tyché/Smyrnaion"). Là encore, il s'agit d'une aberration. La cause de cet irréalisme provient de la formule {(2/n) √(N1 + 2xN2 - [N12/n])} qui accorde trop d'importance à la taille de l'échantillon (n). Il est intéressant d'observer que le nombre d'aberrations de ce type (où d > Dmax) n'est pas supérieur en pratique chez Carter (7 occurrences également: 1x Mésembria; 3x Héraclée; 1x Smyrne "Tyché/Smyrnaion" et 1x Smyrne "Tyché/lion"). On hésitera dès lors à recommander unilatéralement l'intervalle de confiance de Good par rapport à celui de Carter. Confronté à la réalité, il semble en effet que cet intervalle de confiance, certes plus large, est moins réaliste pour la limite inférieure et autorise les mêmes dépassements absurdes pour la limite supérieure.

La conclusion de cet article peut se faire sous forme de mise en garde. En sous-estimant le nombre de coins ayant été très peu utilisés, les méthodes statistiques, quelles qu'elles soient, se méprennent sur la distribution réelle de la productivité. En conséquence, si le but est de parvenir à une estimation du nombre originel de coins (D), toutes les méthodes sous-estiment la réalité. La méthode de I.J. Good, telle que soutenue par W.W. Esty, présente en particulier un écart d'autant plus grand que l'indice charactéroscopique est peu élevé. Dans cette optique et faute de mieux, il ne paraît pas falloir renoncer à l'utilisation de la méthode de G.F. Carter, laquelle, pour paraphraser W.W. Esty de manière paradoxale, livre des résultats aussi valides que les autres pour les échantillons à indices élevés et meilleurs pour les échantillons à faibles indices.

D'un autre côté, si le but véritable concerne, non pas le nombre originel de coins, mais bien le volume de la production, il apparaît que la méthode de Good prônée par W.W. Esty présente le maximum d'attrait. Enfin, si, comme c'est probable, le résultat le plus désirable pour le numismate est de pouvoir exprimer sa recherche en un nombre de monnaies frappées et donc en kilogs ou en tonnes de métal, les résultats des deux méthodes discutées dans cet article ne sont pas forcément inconciliables. Il faut bien voir cependant qu'elles nécessitent de passer par des valeurs différentes pour ce qui est du nombre moyen d'exemplaires susceptibles d'avoir été frappés par un même coin. Cette valeur sera moins élevée chez G.F. Carter qui, en ambitionnant d'estimer tous les coins -y compris ceux ayant très peu servis-, fait inévitablement tomber la moyenne que chez Good/Esty qui s'en tiennent aux coins ayant eu une "productivité normale", partant de l'évidence que les coins ayant peu servis contribuent de manière négligeable à la quantité totale de monnaies émises.

Enfin, la valeur de l'indice charactéroscopique (n/d) ayant une importance démontrée non seulement sur la précision relative de l'estimation mais aussi sur son résultat absolu, il serait plus correct en bonne méthode de comparer des échantillons d'indices similaires. Est-il raisonnable de rêver voir un jour les numismates faire accompagner leurs études de coins d'estimations intermédiaires pour différents indices de référence?